LAHENDUSED

1. *Vastus:* $\mathbf{x_9 = 0}$.

Lahendus. Olgu $x_1 = a \neq 0$ ja $x_2 = b$. Sellistel eeldustel saame, et

$$x_3 = x_2 - x_1 = b - a$$
$$x_4 = x_3 - x_2 = (b - a) - b = -a$$
$$x_5 = x_4 - x_3 = -a - (b - a) = -b$$
$$x_6 = x_5 - x_4 = -b - (-a) = a - b$$
$$x_7 = x_6 - x_5 = (a - b) - (-b) = a$$
$$x_8 = x_7 - x_6 = a - (a - b) = b$$
$$x_9 = x_8 - x_7 = b - a$$

Nüüd kasutame asjaolu, et x_2, x_4 ja x_7 on geomeetrilise jada järjestikused liikmed. Geomeetrilises jadas on naaberliikmete jagatised võrdsed, seega leidub nullist erinev arv q nii, et

$x_4 : x_2 = q$,millest $-a : b = q \Rightarrow -a = q \cdot b \Rightarrow b \neq 0$

ning

$x_7 : x_4 = q$, millest $a : (-a) = q \Rightarrow a = -aq \Rightarrow q = -1$.

Viimase tulemuse asendame seosesse $-a = q \cdot b$ ning saame

$$a = b$$

Jada üheksas liige:

$$x_9 = x_8 - x_7 = b - a = a - a = 0.$$

2. *Vastus:* **576**.

Lahendus. Avaldis $2^n - n^2$ jagub 7-ga parajasti siis, kui 2^n ja n^2 annavad seitsmega jagamisel sama jäägi. Seepärast uurime järgnevalt 7-ga jagamisel tekkivaid jääke.

Kui $n = 1$, siis $2^n = 2^1 = 2$ ning $2 : 7 = 0$, jääk 2.
Kui $n = 2$, siis $2^n = 2^2 = 4$ ning $4 : 7 = 0$, jääk 4.
Kui $n = 3$, siis $2^n = 2^3 = 8$ ning $8 : 7 = 1$, jääk 1.
Kui $n = 4$, siis $2^n = 2^4 = 16$ ning $16 : 7 = 2$, jääk 2.
Kui $n = 5$, siis $2^n = 2^5 = 32$ ning $32 : 7 = 4$, jääk 4.
Kui $n = 6$, siis $2^n = 2^6 = 64$ ning $64 : 7 = 9$, jääk 1.
Kui $n = 7$, siis $2^n = 2^7 = 128$ ning $128 : 7 = 18$, jääk 2.
…
Niisiis hakkavad antud juhul jäägid korduma perioodiga 3.

Kui $n = 1$, siis $n^2 = 1^2 = 1$ ning $1 : 7 = 0$, jääk 1.
Kui $n = 2$, siis $n^2 = 2^2 = 4$ ning $4 : 7 = 0$, jääk 4.
Kui $n = 3$, siis $n^2 = 3^2 = 9$ ning $9 : 7 = 1$, jääk 2.
Kui $n = 4$, siis $n^2 = 4^2 = 16$ ning $16 : 7 = 2$, jääk 2.
Kui $n = 5$, siis $n^2 = 5^2 = 25$ ning $25 : 7 = 3$, jääk 4.
Kui $n = 6$, siis $n^2 = 6^2 = 36$ ning $36 : 7 = 5$, jääk 1.
Kui $n = 7$, siis $n^2 = 7^2 = 49$ ning $49 : 7 = 7$, jääk 0.
Kui $n = 8$, siis $n^2 = 8^2 = 64$ ning $64 : 7 = 9$, jääk 1.
Kui $n = 9$, siis $n^2 = 9^2 = 81$ ning $81 : 7 = 11$, jääk 4.
Kui $n = 10$, siis $n^2 = 10^2 = 100$ ning $100 : 7 = 14$, jääk 2.
…
Jäägid hakkavad korduma perioodiga 7.

Lihtsuse ja ülevaatlikkuse mõttes kogume andmed ühisesse tabelisse ning rõhutame juhte, kus jäägid on ühesugused. Kuna jäägid kordusid ühel juhul perioodiga 3 ja teisel juhul perioodiga 7, siis avaldise $2^n - n^2$ puhul toimub jääkide kordumine perioodiga $3 \cdot 7 = 21$.

n	1	**2**	3	**4**	**5**	**6**	7	8	9	**10**	11	12	13	14	**15**	16	17	18	19	20	21
2^n	2	**4**	1	**2**	**4**	**1**	2	4	1	**2**	4	1	2	4	**1**	2	4	1	2	4	1
n^2	1	**4**	2	**2**	**4**	**1**	0	1	4	**2**	2	4	1	0	**1**	4	2	2	4	1	0

Ilmneb, et jäägid langevad kokku kuuel korral 21-st. Edasi kontrollime, mitu korda mahub 21 etteantud vahemikku:

$$2011 : 21 = 95 \text{, jääk } 16$$

Niisiis on jääkide kokkulangevusi $6 \cdot 96 = 576$.

3. *Vastus:* $\boldsymbol{x = \frac{1}{11}}$.

Lahendus. Logaritmide omadusi ning astendamise reegleid kasutades teisendame võrrandi mõlemad pooled alusele 2012.

$$2011^{x\log_{2011}2012} = \frac{1}{\left(\sqrt{2012}\right)^{22x^2-4x}}$$

$a^{\log_a b} = b$

Vasak pool $2011^{x\log_{2011}2012} = 2011^{\log_{2011}2012^x} = 2012^x$.

$n\log_a b = \log_a b^n$

Parem pool $\frac{1}{\left(\sqrt{2012}\right)^{22x^2-4x}} = \frac{1}{(2012)^{\frac{1}{2}\cdot\left(22x^2-4x\right)}} = \frac{1}{2012^{11x^2-2x}} = 2012^{2x-11x^2}$.

Niisiis saame eksponentvõrrandi

$$2012^x = 2012^{2x-11x^2},$$

millest omakorda võrdsed alused ära jättes ruutvõrrandi

$$x = 2x - 11x^2$$
$$11x^2 - x = 0$$
$$x\cdot\left(11x-1\right) = 0$$
$$x_1 = 0 \text{ ja } x_2 = \frac{1}{11}$$

Võrrandi positiivne lahend on $x = \frac{1}{11}$.

<u>Kontroll</u>, kui $x = \frac{1}{11}$.

$$vp = 2011^{\frac{1}{11}\log_{2011}2012} = 2011^{\log_{2011}2012^{\frac{1}{11}}} = 2012^{\frac{1}{11}}$$

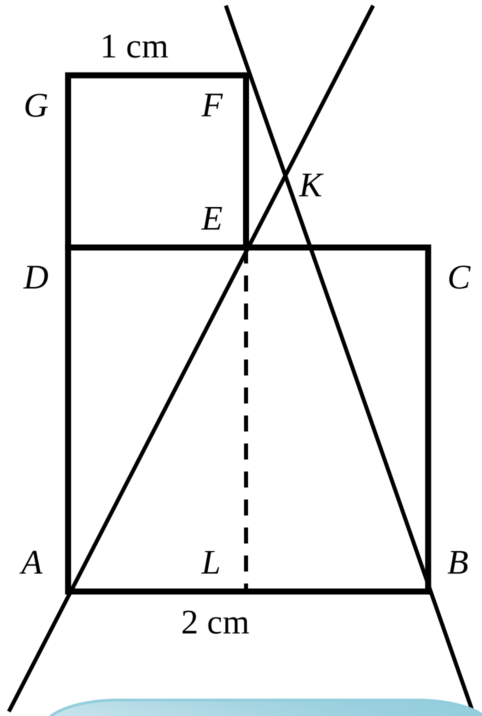
$$pp = \frac{1}{\left(\sqrt{2012}\right)^{22\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^2-4\cdot\frac{1}{11}}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2012}\right)^{\frac{22}{121}-\frac{4}{11}}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2012}\right)^{-\frac{22}{121}}} = \left(\sqrt{2012}\right)^{\frac{22}{121}} =$$

$$= \left(2012^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{22}{121}} = 2012^{\frac{1}{2}\cdot\frac{22}{121}} = 2012^{\frac{11}{121}} = 2012^{\frac{1}{11}}$$

$$vp = pp$$

4. *Vastus:* $\angle \boldsymbol{AKB} = \mathbf{45°}$.

Lahendus. Teeme abistava joonise.



Üldine plaan.

Kõigepealt paneme tähele, et $\angle AKB$ on kolmnurga EKF välisnurk, mistõttu

$$\angle AKB = \angle KFE + \angle FEK$$

Järgnevalt leiame nurkade KFE ja FEK tangensid ning seejärel juba nurga AKB suuruse.

Nurga FEK tangens.

Et $\angle FEK = \angle DAE$ (võrdsed kaasnurgad), siis täisnurksest kolmnurgast AED saame

$$\tan(\angle DAE) = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{1}{2}$$

Nurga EFK tangens.

Täiendame joonist lõigu FE pikendusega. Olgu L sirgete AB ja FE lõikepunkt. Täisnurksest kolmnurgast LBF saame

$$\tan(\angle BFL) = \frac{|BL|}{|FL|} = \frac{1}{3}$$

Kasutame nurkade summa tangensi valemit

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Nurga AKB suurus.

$$\tan(\angle AKB) = \tan[(\angle EAD) + (\angle BFL)] = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1,$$

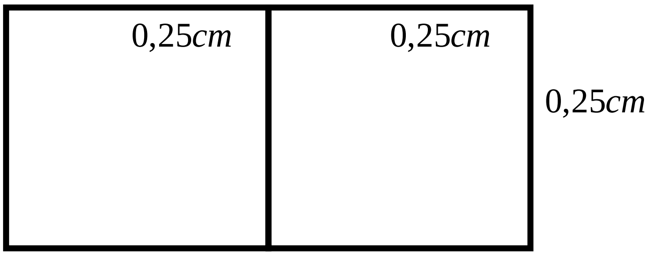
millest

$$\angle AKB = \arctan 1 = 45°.$$

5. *Vastus:* a) **ei**; b) **jah**.

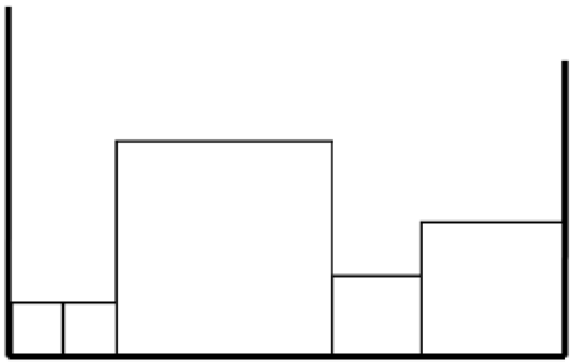
Lahendus.

a) Vaatleme kahest ruudust küljepikkusega 0,25 cm koosnevat ristkülikut.



Iga ruudu ümbermõõt $4 \cdot 0{,}25cm = 1cm$ on täisarv sentimeetreid. Vaadeldav ristkülik on aga mõõtmetega $0{,}25cm \times 0{,}5cm$ ning selle ümbermõõt on $(0{,}25\,cm + 0{,}5\,cm) \cdot 2 = 1{,}5\,cm$, mis pole täisarv sentimeetreid. Seega nii väita ei saa.

b) Vaatame suurema ruudu suvalist külge. See moodustub väiksemate ruutude külgedest.



Olgu nende külgede pikkused $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$. Suurema ruudu külje pikkus on siis $a = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ ning ümbermõõt

$$P = 4a = 4 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) = 4a_1 + 4a_2 + 4a_3 + ... + 4a_n .$$

Kuna iga liidetav on mingi väiksema ruudu ümbermõõt, mis on eeldusekohaselt täisarv, siis ka summa on täisarv.

HINDAMINE

1.	Liikme x_4 avaldamise (näiteks esimese ja teise liikme kaudu) eest	1p
	Liikme x_7 avaldamise eest	1p
	Liikme x_9 avaldamise eest	1p
	Geomeetrilise jada teguri leidmise eest	2p
	Liikme x_9 väärtuse leidmise eest	2p
		7p

2.	Üldise idee taipamise eest	2p
	Suuruse 2^n jääkide uurimise eest	1p
	Suuruse n^2 jääkide uurimise eest	1p
	Suuruse $2^n - n^2$ kohta järelduse tegemise eest	1p
	Ülesande tehnilise lõpuleviimise eest kokku	2p

Märkus. Kui õpilane hakkab avaldise $2^n - n^2$ jääke vahetult uurima ning suudab teha kindlaks seaduspära, siis anda selle eest 5p. Vastuse leidmise eest 2p.

3.	Võrrandi vasaku poole teisendamise eest kujuni 2012^x	3p
	Võrrandi parema poole teisendamise eest kujuni 2012^{2x-11x^2}	2p
	Lahendi leidmise eest	2p
		7p

Märkus. Võrrandi paremale poolele võib jätta ainult arvu 1. Sellisel juhul tehakse vastavad teisendused võrrandi vasakul poolel.

4.	Korrektse abijoonise eest	1p
	Üldise idee eest	2p
	Nurga *FEK* tangensi leidmise eest	1p
	Nurga *KFE* tangensi leidmise eest	1p
	Nurga *BKA* suuruse leidmise eest	2p
		7p

Märkus. Sama tulemuseni jõuab ka muid trigonomeetrilisi funktsioone (siinus, koosinus) kasutades, kuid sellisel juhul tuleb veidi rohkem vaeva näha. Ükskõik kui keerulise õige lahenduse korral anda 7p.

5.	Ülesande a) osa lahenduse eest	3p
	Ülesande b) osa lahenduse eest	4p
		7p

Märkus. Ülesande a) osas sobib ükskõik milline sobiv konkreetne näide. Selgitusteta antud (või mittearusaadavate) õigete vastuste eest anda kokku 1p.